26/11/14

- Να προσαρμοστεί πολυώνυμο το πολύ τρίτου βαθμού στον παρακάτω πίνακα τιμών. χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε τύπο παρεμβολής

x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	-4	-1	5	7

Απ. Αν $f\in C^4[-2,2]$ και $\max\limits_{-2\le x\le 2}|f^{(4)}(x)|=2$, να βρεθεί ένα φράγμα για το απόλυτο σφάλμα κατά την παρεμβολή στο $[-2,2]$.

	$n=0$	1		
-2	-4			
-1	-1	3		
1	5	3	0	
2	7	2	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$

- $P(x)=f(x_0)+\Delta^1(x_0,x_1)(x-x_0)+\Delta^2(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+\Delta^3(x_0,x_1,x_2,x_3)(x-x_0)(x_0-x_1)(x_1-x_2)=$
$-4+3(x+2)-\frac{1}{12}(x+2)(x+1)(x-1)=-4+3x+6-\frac{1}{12}\cdot(x^3+2x^2-x-2)=-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{6}x^2+\frac{37}{12}x+\frac{13}{6}$.

$\rightarrow |f(x)-P(x)|\le\frac{1}{(n+1)!}\max\limits_{a\le x\le b}|\varphi(x)|\max\limits_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(x)|$, $n=3$.

$|f(x)-P(x)|\le\frac{1}{4!}\max\limits_{-2\le x\le 2}|(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)|\max\limits_{-2\le x\le 2}|f^{(4)}(x)|$

$\varphi(x)=x^4-5x^2+4$, $\varphi'(x)=4x^3-10x=x(4x^2-10)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=\sqrt{\frac{5}{2}}\\ x_3=-\sqrt{\frac{5}{2}}\end{cases}$

$\varphi(0)=4$? $\varphi(\pm\sqrt{\frac{5}{2}})=\frac{25}{4}-\frac{25}{2}+4=-\frac{9}{4}$

$\max\limits_{-2\le x\le 2}|\varphi(x)|=\varphi(0)=4$, $|f(x)-P(x)|\le\frac{1}{4!}4\cdot 2=\frac{1}{3}$.

- Να προσαρμοστεί πολυώνυμο το πολύ τρίτου βαθμού στον πίνακα τιμών

x_i	-1	0	1	3
$f(x_i)$	-4	-1	0	20

	$n=0$	1	2	
-1	-4			
0	-1	3		
1	0	1	-1	
3	20	10	3	1

Άρα $P(x)=$
$-4+3(x+1)-(x+1)x+(x+1)x\cdot(x-1)=-4+3x+3-x^2-x+x^3-x$
$=x^3-x^2+x-1$.

Αν θεωρήσουμε τη μετάθεση $(t_0, t_1, \dots, t_n)$ των ακεραίων $(0,1,\dots,n)$ τότε: $\Delta^n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \Delta^n(x_{t_0}, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$.

<u>Απόδειξη.</u>

Θεωρούμε το $P(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$ πολυώνυμο παρεμβολής μιας συνάρτησης f στα $x_0, x_1, \dots, x_n$. Θεωρούμε και το $P(x_{t_0}, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}, x)$ πολ. παρεμβολής της ίδιας συνάρτησης f, στα σημεία $x_{t_0}, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}$. Τα πολυώνυμα ταυτίζονται και $\Delta^n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \Delta^n(x_{t_0}, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ ως συντελεστής μεγ. όρου του ίδιου πολυωνύμου.

Θεωρούμε τη σειρά των σημείων $=(3,1,0,-1)$.

$P(x) = f(x_3) + \Delta^1(x_3, x_2)(x-x_3) + \Delta^2(x_3, x_2, x_1)(x-x_3)(x-x_2) + \Delta^3(x_3, x_2, x_1, x_0)(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1) = 20 + 10(x-x_3) + 3(x-3)(x-1) + (x-3)(x-1)x = 20 + 10x - 30 + 3x^2 - 12x + 9 + x^3 - 4x^2 + 3x = x^3 - x^2 + x - 1$

- Να βρεθεί η συνάρτηση f όταν είναι γνωστό ότι είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού με συντελεστή μεγ.βαθμίου όρου 1 και δίνεται από τον πίνακα τιμών

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	-1	3

, χρησιμοποιώντας παρεμβολή.

	n=0	1	
0	1		
1	-1	-2	
2	3	4	3

$$\left\{ \begin{aligned} P(x) &= 1 - 2x + 3x(x-1) \\ &= 3x^2 - 5x + 1. \end{aligned} \right.$$

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!}\, \Phi(x)\, f''(\xi) \qquad , \xi \in (0,2).$$

$$f(x) = P(x) + \frac{1}{3!}\, x(x-1)(x-2)\left(\xi^3 + q_2(\xi)\right)''' = 3x^2 - 5x + 1 + \frac{3!}{3!}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$
$$= x^3 - 3x + 1.$$

- Να αποδειχτεί ότι το άθροισμα $s(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού ως προς n και να βρεθεί το πολυώνυμο χρησιμοποιώντας παρεμβολή.

Αν $f \in \mathbb{P}_{n-1}$, τότε $\Delta^n(x_1, x_2, \dots x_n)(f)=0$.
Η διαφ. αυτή είναι συντελεστής του x^n στο πολ. παρεμβολής της f. Επειδή $f \in \mathbb{P}_{n-1}$ τότε $p=f \in \mathbb{P}_{n-1}$. Επομένως: $\Delta^n(x_0, x_1, \dots x_n)=0$.

$\Delta^1(n-1,n)(S)=\frac{S(n)-S(n-1)}{n-(n-1)}=\sum_{j=1}^{n} j^2-\sum_{j=1}^{n-1} j^2=n^2$. Η στήλη των πρώτων διαφ. διαφορών είναι πολυων. <u>δευτέρου βαθμού</u> ως προς n.
Επομένως οι τρείς διαφορές μετά τη στήλη των $1^{ων}$ διαφορών θα'ναι 0.
Επομένως η στήλη των $4^{ων}$ διαφορών θα'ναι 0, που σημαίνει ότι η συνάρτηση $s(n)$ είναι πολ. τρίτου βαθμού.

	i=0	1	2	
0	0			
1	1	1		
2	5	4	$\frac{3}{2}$	
3	14	9	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{3}$

$$s(n)=0+n+\frac{3}{2}n(n-1)+\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$$
$$=n+\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+\frac{1}{3}n^3-n^2+\frac{2}{3}n=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n \dots$$